828. Mannigfaltigkeit ヘノ連続変換 III

小松醇郎（阪大）

定理 I　Komplex K^n ガ Mannigfaltigkeit M^n ニ wesentlich auf ニ abbilden サレレバ K^n ノ或ル Überdeckung ニ関シテ $\neq 0$ ナ 0-Zyklus Z^n ガ存在スル。

コレハ本誌、第189号、談話818、533頁終リニ述ベタコトデアルガ証明ハソウ簡単デハナカッタ。又次元ヲ更ヘテ K^m ガ M^n ヘトシタトキハ具合ノ悪イトコロガ出テ来ル。

先ヅ $S^m \longrightarrow M^n$ ノ wesentlich auf ナ Abbildungsklasse ヲ Charakterisieren スル問題ヲ調ベル。

定義．$\pi^m(M^n)$ ノ元ノ中デ S^m ノ Bildmenge ガ高々 $(n-1)$ 次元ニナルヤウナ元凡ベテハ $\pi^m(M^n)$ ノ部分群ヲ成ス。

ソレニ関スル Faktorgruppe $\mathfrak{U}^m(M^n)$ ハ、ソノ元 $(\neq 0)$ ヲ表ハス所ノ Bildmenge ハ凡テ n 次元デアル。

$|f(S^m)| = |M^n|$（Punktmenge トシテ），此ノ f ヲ表ハス元 α $(\in \mathfrak{U}^m(M^n)) \neq 0$ トスル．今 Z^{n-1} ヲ一点ニ Identifizieren シテ Sphäre S^n

ヲ考ヘレバ f ハ $S^m \to S^n$ 故ニ $\pi^m(S^n)$ ノ或ル元 $h(\alpha)$ ガ對應セシメラル. 對應

$$h:\ \alpha \longrightarrow h(\alpha)$$

ハ $\mathfrak{u}^m(M^n) \longrightarrow \pi^m(S^n)$ ノ *homomorph in* ノ對應デアル. $\mathfrak{u}^n(M^n) \longrightarrow \pi^n(S^n)$ ハ *isomorph in* デアル. 即チ $S^n \longrightarrow M^n$ ナル *wesentlich auf* ナ *Abbildung* ハ $(n-1)$ 次元以下ヲ無視スレバソノ *Grad* デ *Charakterisieren* サレル。

補助定理 1. M^n ガ單純連結ナラバ上ノ對應 h

$$\mathfrak{u}^m(M^n) \longrightarrow \pi^m(S^n)$$

ハ *isomorph in* デアル。

<u>證明</u>: 對應ガ *isomorph* デナイトシテ Kern ニ含マレル元 $\alpha \neq 0$ ヲトレバ α ヲ與ヘル連續變换 f デハ $|f(S^m)| = |M^n|$. $q \in M^n$, $q \,\overline{\in}\, \mathfrak{z}^{n-1}$ ノ原像 $f^{-1}(q)$ ハ M^n 單純連結ナル故ニ, 一ツノ $(m-n)$ 次元 *Mannigfaltigkeit* M^{m-n} デアル。[1] n－單体 T^n (開集合), $T^n \ni q$ ヲトレバ $f^{-1}(T^n)$ ハ M^{m-n} トル單体トノ *topologisches Produkt* デアル。即チ

$$f^{-1}(T^n) = T^n \times M^{m-n}$$

且ツ $f^{-1}(T^n)$ ノ境界ハ f ニヨリ $\dot{T}^n$ ニ移ル. 此ノ局部的

---

1) H. Freudenthal: Über die Klassen der Sphärenabbildungen. I. Comp. Math. 5 (1937). 299

ノ変換 f ヲ $S^m \longrightarrow S^n$ ニ erweitern[2] スレバ假定ニヨリ $\pi^m(S^n)$ ノ0元ニナル. α ヲ與ヘル変換 f デ Z^{n-1} ヲ一点ニ Identifizieren シタモノデアル。

$\pi^m(S^n)$ ノ0元ダカラ, f ト等シイ Klasse デ g, 從ッテ又 T^n ノ原像ガナイ（空集合）モノ存在ス。之レハ Z^{n-1} ヲ Identifizieren シタ一点ノ原像ヲ fixed ニシテ出来ル。

從ッテ之レハ $f: S^m \longrightarrow M^n$ ノ変換ト考ヘタ場合ニ wesentlich auf デナイ. 之レハ $u^m(M^n)$ ノ0デナイ元 α ニ矛盾スル. 故ニ $h: u^m(M^n) \longrightarrow \pi^m(S^n)$ ハ isomorph.

補助定理2。$S^m \longrightarrow M^n$ ノ wesentlich auf ナAbbildungsgruppe $u^m(M^n)$ ハ $p\pi^m(S^n)$* ニ homomorph in ニ zuordnen サレル。

<u>証明</u>: lemma 1 ノ假定。即チ M^n 單純連結ナル條件ヲ除イタモノデアル。M^n ノ universelle überlagerungsraum $\tilde{M}^n$ ヲ作ル. M^n 及ビ $\tilde{M}^n$ 共ニ kompakt デアル。

---

2) L. Pontrjagin: A classification of continuos transformations of a Complex into a sphere I. Comptes Rendus (Moscon) 19 (1938)

* p ハ整數. $\pi^m(S^n)$ ノ元凡テヲ p 倍シタモノノ作ル部分群. p ハ M^n ニ関シテ一意ニ定ル數。

$\pi^m(M^n)$ ト $\pi^m(\widetilde{M}^n)$ トハ isomorph デアル。(W. Hurewicz).

$u^m(M^n)$ ト $u^m(\widetilde{M}^n)$ トハ isomorph デアル. $\widetilde{M}^n \to M^n$ ノ überdecken スル変換ヲ φ トスレバ $u^m(M^n)$ ヲ與ヘル連続変換 g ハ $u^m(\widetilde{M}^n)$ ヲ與ヘル連続変換 f ニ φ ヲ加ヘタモノデアル。即チ

$$f:\ S^m \longrightarrow \widetilde{M}^n$$

$$g:\ S^m \xrightarrow{f} \widetilde{M}^n \xrightarrow{\varphi} M^n$$

$g = \varphi f$ ヲ $f \xrightarrow{\varphi} g$ トシテ $u^m(\widetilde{M}^n)$ ノ $u^m(M^n)$ ヘノ isomorph ノ zuordnung ヲ表ハセル。$\widetilde{M}^n$ ハ M^n ノ一点 q ヲ Spur トシテ p 個ノ原像ヲ持ツトスル。

lemma 1 デ $\quad u^m(\widetilde{M}^n) \xrightarrow{\widetilde{k}} \pi^m(S^n)$ ハ

isomorph in

$$u^m(\widetilde{M}^n) \xrightarrow{\varphi} u^m(M^n)$$

isomorph auf.

故ニ $\quad u^m(M^n) \xrightarrow{\widetilde{k}\varphi^{-1}} \pi^m(S^n)$

isomorph in.

$\widetilde{k}\varphi^{-1}$ ナル對應ヲ幾何學的ニ考ヘル。

$\alpha \in u^m(\widetilde{M}^n)$, $\quad \widetilde{k}(\alpha) \in \pi^m(S^n)$

$\varphi(\alpha) = \beta \in u^m(M^n)$, $\quad k(\beta) \in \pi^m(S^n)$

α ト β ト isomorph ノ對應デアルガ $\widetilde{k}(\alpha)$ ト $k(\beta)$ トノ関係ハ

$$k(\beta) = p\,\widetilde{k}(\alpha).$$

Z^{n-1} ヲ一点ニ縮メル Operation デ $\widetilde{k}$ ハ isomorph, k ハ homomorph. $k(\mathfrak{u}^m(M^n)) \to p\tilde{k}(M^m(\tilde{M}^n))$ デアル。

然シ代數的對應デハ

$$\varphi: \mathfrak{u}^m(\tilde{M}^n) \longleftrightarrow \mathfrak{u}^m(M^n)$$

isomorph auf ダカラ $\mathfrak{u}^m(M^n)$ ノ Abbildungsklasse ハ $\tilde{k}(\mathfrak{u}^m(\tilde{M}^n))$。

即チ Hypergrad デ Charakterisieren 出来ル. 然シ $\tilde{M}^n$ ヲ持ッテ来ズニ M^n ダケデハ $\longrightarrow p\pi^m(S^n)$ デ homomorph デアル。特ニ $m=n$ ナラバ $p\pi^n(S^n)$ ハ $\pi^n(S^n)$ ノ部分群デアルガ同時ニ $\pi^n(S^n)$ ト isomorph auf デアル。即チ $\mathfrak{u}^n(M^n)$ ハ $p\pi^n(S^n)$ ニ isomorph in デアル。

<u>定義</u> 部分群 $k(\mathfrak{u}^m(M^n))$ ヲ $\pi'^m(S^n, M^n)$ デ表ス。

$\pi^m(M^n)$ ハ原点ノ取リ方ニ從ヒ，換言スレバ M^n，閉道 w ニ對シ Automorphismus γ_w ヲ受ケル。(Eilenberg，安倍亮)

補助定理3. $\mathfrak{u}^m(M^n)$ ハ閉道 w ニ對シ Automorphismus γ_w ハ identisch ナモノデアル。$\mathfrak{u}^m(M^n)$ ノ記号（安倍亮）デハ

$$w^{-1}\alpha w = \alpha, \quad \alpha \in \mathfrak{u}^m(M^n)$$

<u>証明</u>: $\alpha' = w^{-1}\alpha w$, $\alpha' \neq \alpha$ トシテ，α，α' ヲ與ヘル Abbildung $S^m \longrightarrow M^n$ ヲ f, f' トス. 之レヲ $\tilde{M}^n$ ヘノ変換ニ直セバ $g = \varphi^{-1} f$, $g' = \varphi^{-1} g$.

$\varphi^{-1}(\alpha) \neq \varphi^{-1}(\alpha')$.

玆デ isomorph ノ對應 $\widetilde{h}$ ヲ行ヘバ $\widetilde{h}\varphi^{-1}(\alpha) \neq \widetilde{h}\varphi^{-1}(\alpha')$, 即チ $\pi^m(S^n)$ ノ異ナル元、然ルニ $\alpha' = w^{-1}\alpha w$ ナル假定カラ明ラカニソノ hypergrad ハ等シイ。$\widetilde{h}\varphi^{-1}(\alpha) = \widetilde{h}\varphi^{-1}(\alpha')$.

—— 以上 ——

補助定理 4. $\lambda^{m-1}(Z^{n-1})$ [3] ハ $\pi^m(S^n) - \pi'^m(S^n, M^n)$ ニ homomorph in ニ abbilden サレル.
特ニ $m = n$ ナラバ homomorph auf デアル。

<u>証明</u>: $\alpha \in \lambda^{m-1}(Z^{n-1})$ ヲ與ヘル連続変換 $f: S^{m-1} \longrightarrow Z^{n-1}$ トスル。$E^m = S^{m-1}$ トスレバ f ハ E^m マデ M^n ヘ erweitern 出来ル. $F: E^m \longrightarrow M^n$ デ Z^{n-1} ヲ一点ニ Identifizieren スレバ $\pi^m(S^n)$ ノ或ル元 β ヲ與ヘル。

$$\alpha \longrightarrow \beta$$

ハ mod. $\pi'^m(S^n)$ デ eindeutig デアル。

eindeutig デナイトスレバ E^m ヘノ他ノ Erweiterung F' デ $F': E^m \longrightarrow M^n$ デ $\beta'(\neq\beta)$ ヲ與ヘル、二ツノ E^m ハ Rand デ Abbildung ハ f ニ等シイ. 二ツ合セルト S^m ノ変換ト考ヘラル。從ツテ $\pi'^m(S^n)$ ノ或ル元デアル. 然ルニ之ハ $\beta - \beta'$ デアル。

---

3) 本誌第 189 号ニ Mannigfaltigkeit ヘノ連続変換 II. 定理 IV ハ一般ノ m デハ出来ナイト思フ。

$\therefore\ \beta-\beta'\equiv 0 \quad \mathrm{mod.}\ \pi'^{m}(S^{n})$

對應 $\lambda^{m-1}(Z^{n-1})\longrightarrow \pi^{m}(S^{n})-\pi'^{m}(S^{n})$ ハ Homomorphismus デアル。auf カドウカハ分ラナイ。

$\lambda^{m-1}(Z^{n-1})\longrightarrow \pi^{m}(S^{n})-\pi'^{m}(S^{n})$ ノ homomorphes Bild ヲ $\pi^{m}(S^{n})$ ノ中ノ代表元デ表ハシテ $h(\lambda^{m-1}(Z^{n-1}))$ トスル。從ッテ $\alpha\in\lambda^{m-1}(Z^{n-1})$ ニ上ノ操作デ對應スル元ハ $h(\alpha)+\pi'^{m}(S^{n})$ デアル。

<u>定義</u>: $\alpha\in\lambda^{n-1}(Z^{n-1})$。$\beta\in\pi'^{n}(S^{n})$ トシ凡エル paar $(\alpha, h(\alpha)+\beta)$ ハ abel 群ヲ作ル。ソレヲ $\mathfrak{G}$ トスル。記号デ $\mathfrak{G}=(\lambda^{n-1}(Z^{n-1}),\ h(\lambda^{n-1}(Z^{n-1}))+\pi'^{n}(S^{n}))$ ト表ス。

$$(\alpha,\ h(\alpha)+\beta)+(\alpha',\ h(\alpha')+\beta')$$
$$=(\alpha+\alpha',\ h(\alpha)+h(\alpha')+\beta+\beta'),$$

茲ニ $h(\alpha+\alpha')=\beta''\in\pi'^{n}(S^{n})$ ナラバ

$$=(\alpha+\alpha',\ \beta''+\beta'+\beta)$$

Z^{n-1} が $(n-1)$ simple デナイナラバ weg w ニ対シテ $\lambda^{n-1}(Z^{n-1})$ ハ Automorphismus γ_w ヲ受ケル. $h(\lambda^{n-1}(Z^{n-1}))$ ハ明ニ w ニ關シナイ. 從ッテ群 $\mathfrak{G}$ ハ Automorphismus γ_w ヲ受ケテ

$$\gamma_w(\alpha,\ h(\alpha)+\beta)=(\gamma_w\alpha,\ h(\alpha)+\beta)$$
$$=(\gamma_w\alpha,\ h(\gamma_w\alpha)+\beta)$$

<u>定義</u>: Komplex K^{n} ノ頂点ニ順序ヲ附ス. 各

單体ニ，ソノ頂点ノウチデ最始ノ番号ノ頂点ヲ對應サス。

$$T_1^i \longrightarrow p_1$$

ingident ナ Simplex $T_1^i > T_2^{i-1}$ ニ對シテ對應スル頂点 p_1，p_2 ガ定マル。

$$p_1 \text{------} p_2$$

今 $K^2 \longrightarrow M^n$ ナル連続変換 f ガ與ヘラレタトスレバ p_1 ト p_2 トヲ結ブ Strecke $\overline{p_1 p_2}$ ハ M^n ノ一ツノ weg. K^n ノ凡ベテノ頂点ハ M^n ノ一点ニウツストスレバ閉道ニナル。

$$f(\overline{p_1 p_2}) = w \subset M^n$$

ingident ナ單体 (T_1^i, T_2^{i-1}) ニ對シ閉道 w ガ對應スル。群 $\lambda^{m-1}(Z^{n-1})$ ハ閉道 w ニ対シ Automorphismus γ_w ヲ受ケル・從ッテ (T_1^i, T_2^{i-1}) ニ対シ群 $\mathfrak{G}$ ノ Automorphismus γ_w ガ對應スル・此ノ對應ハ Überdeckung ノ條件ヲ充ス。[4)]

即チ K^n デ係數群ヲ $\mathfrak{G}$ トシ Ingidenz Automorphismus γ_w ヲトル Überdeckung ヲ U_f デ表ス。$K^2 \longrightarrow M^n$ ノ変換 f ニ depend スル。

定理1ノ証明：

$\dot{T}^n$ ハ f ニヨリ Z^{n-1} ニ移ル。故ニ $\lambda^{n-1}(Z^{n-1})$ ノ或ル元 α，又 T^n ノ中マデ f 定義出来テ居ルカラ Z^{n-1} ヲ一

4) 本誌第189号．P.532

點＝Identifizieren スルコトニ依リ $h(\alpha)+\beta$ ヲ表ス。コヽニ $\beta\in\pi'^{n}(S^n)$. 從ツテ各 n－單体 T_i^n ニ對シ $\mathfrak{G}_f$ ノ元 $(\alpha_i,\ h(\alpha_i)+\beta_i)$ ガ一意ニ定マル。

代數複体 $f^n: T_i^n \longrightarrow (\alpha_i,\ h(\alpha_i)+\beta_i)$ ハ 0－Zyklus デアル。コノ f^n ハ Überdeckung $\mathfrak{U}_f$ デ ~ 0 デアル。~ 0 ト假定スレバ次ノ複体 f^{n-1} ガ存在スル。

$$f^{n-1}: T_j^{n-1} \longrightarrow (\alpha_j,\ h(\alpha_j)+\beta_j)$$

$$g_0 f^{n-1} = f^n.$$

$T^n\times t\ (0\leqq t\leqq 1)$ ニ對シ Abbildung F ヲ次ノ如ク作ル。

$\underline{F(T^n\times 0)}\equiv f(T^n)$

$\underline{F(T_k^{n-2}\times t)}\equiv f(T_k^{n-2})$, $t=$ independent.

$\underline{F(T_j^{n-1}\times 1)}$. T_j^{n-1} ノ最始ノ頂點 p_j ニ關シテ, $T_j^{n-1}\times 0-T_j^{n-1}\times 1$ ノ變換ガ $\pi^{n-1}(Z^{n-1})$ ノ α_j ヲ與ヘルヤウニトル。

$\underline{F(T_j^{n-1}\times t)}$ 上ノ作リ方カラ此ノ境界 $T_j^{n-1}\times 0+\sum_k T_k^{n-2}\times t-T_j^{n-1}\times 1$ ノ變換ハ α_j, 從ツテソノ n 次元ノ Vollkugel ノ變換トシテ $h(\alpha_j)+\beta_j$ ヲ與ヘル樣ニトル。

$\underline{F(T^n\times 1)}$ 此ノ境界ハ $\sum_j T_j^{n-1}\times 1$. 此ノ變換ハ上ニ與ヘタガ最始ノ頂點 p ニ關スル $\pi^{n-1}(Z^{n-1})$ ノ元ハ $\mathfrak{V}$ デアル。$g_0 f^{n-1}-f^n=0$ ナル假定カラ

$\sum_j \gamma_j\alpha_j-\alpha=0$, 茲ニ γ_j ハ線分 pp_j ガ f ニヨリ

M^n ノ weg ニ移リ、ソノ weg ニヨル λ^{n-1} ($\mathfrak{Z}^{n-1}$) ノ Automorphismus デアル。從ツテ $F(T^n \times 1) \subset Z^{n-1}$ ニ作ルコトヲ得。

<u>$F(T^n \times t)$</u>　　$(T^n \times t)^{\cdot} = T^n \times 0 + \sum_j T_j^{n-1} \times t - T^n \times 1$. 境界ニハ既ニ F ヲ與ヘタ。$\pi^n(M^n)$ ノ或ル元ヲ表ハス。

補助定理 1, 2 ニヨリ $\pi'^n(S^n)$ ノ元ヲ一意ニ表ハス. 然ルニ $g_0 f^{n-1} - f^n = 0$ カラソノ元ハ

$$T^n \times 0 \to h(\alpha) + \beta,$$

$$T_j^{n-1} \times t \to h(\alpha_j) + \beta_j,$$

$$T^n \times 1 \to 0$$

即チ 0 元　補助定理 2 ニヨリ，從ツテ $\mu^n(M^n)$ ノ 0 元デアル. 從ツテ $F(T^n \times t)^{\cdot}$ ハ $\pi^n(M^n)$ ノ元ノウチ wesentlich n デナイ元ヲ表ス. 故ニ $F(T^n \times 1)$ ノ変換ヲ Z^{n-1} 内デ適當ニトレバ $\pi^n(M^n)$ ノ 0 元ニトレル. 從ツテ $F(T^n \times t)$ ニ erweitern 出來ル.

以上ニヨリ $f^n \sim 0$ ナラバ $f(T^n)$ ハ $F(T^n \times 1) \subset \mathfrak{Z}^{n-1}$ ニ homotop. 即チ $f(K^n)$ ハ wesentlich auf デナイ。——以上——

<u>定理 2</u>. $f(K^{n-1}) \subset \mathfrak{Z}^{n-1}$, $f(\dot{T}^n) \to \alpha \in \lambda^{n-1}$ ($\mathfrak{Z}^{n-1}$) ナルトキ $\mathfrak{U}_f$ ニ關シ $T^n \to (\alpha, h(\alpha) + \beta)$ ナル n 次元 Oberer Zyklus $\nsim 0$ ガ存在スルナラバ f ハ K^n マデ M^n ニ erweitern サレテソレハ wesentlich auf デアル。

証明：　f ガ K^n 迄 erweitern 出来且ツ T^n ノ内部ハ $\pi^n(S^n)$ ノ $h(\alpha)+\beta$ ナル元ヲ表ハスヤウニ出来ルコトハ明カ。今コレガ wesentlich auf デナイトスルナラバ $K^n\times t$ $(0\leqq t\leqq 1)$ ノ abbildung F_t ガ存在シ

$$F_1(K^n\times 1)\subset Z^{n-1},\quad F_0(K^n\times 0)\equiv f(K^n)$$

ト出来ル．$F(p\times t)$ ハ Z^{n-1} ノ閉道 w_p．$F(T_j^{n-1}\times t)^\cdot$ ハ $\lambda^{n-1}(Z^{n-1})$ ハ元 α_j ヲ表ハス。

但シ基準点ハ $p_j\times 0$ ニトル．$p\times 0$ ヲ基準ニシタ $(T^n\times 0)^\cdot+\sum_j(T_j^{n-1}\times t)^\cdot$ ノ F ニヨル $\lambda^{n-1}(Z^{n-1})$ ノ元ハ $\alpha+\sum_j\gamma_j\alpha_j$．

之レヲ $p\times 1$ ノ基準ニ移セバ $F(p\times t)=w_p$ トスレバ

$$\gamma_p\left(\alpha+\sum_j\gamma_j\alpha_j\right)\in\lambda^{n-1}(Z^{n-1}).$$

是レハ $F(T^n\times 1)^\cdot$ ノ表ス元．$F(T^n)\subset Z^{n-1}$ デアルカラ

$$\gamma_p\left(\alpha+\sum_j\gamma_j\alpha_j\right)=0$$

即チ $\alpha=-\sum_j\gamma_j\alpha_j$

又 $F(T^n)$，$F(T_j^{n-1}\times t)$ $(F(T^n\times 1))$ ニヨル $\pi^n(S^n)$ ノ元ハ夫々 $h(\alpha)+\beta$，$h(\alpha_j)+\beta_j=h(\gamma_j\alpha_j)$

$+\beta_j$, 0 デアツテ

$$F(T^n \times t)' \longrightarrow h(\alpha)+\beta+\sum_j h(\alpha_j)+\beta_j$$

$$= 0 \in \pi^n(S^n).$$

故ニ $h(\alpha)+\beta = -\sum_j h(\alpha_j)+\beta_j$

故ニ $(n-1)$ 次元代数複体

$$f^{n-1}: -T_j^{n-1} \longrightarrow (\alpha_j,\ h(\alpha_j)+\beta_j)$$

ヲトレバ $g_0 f^{n-1} = f^n$.

—以上—

定理 3. Mannigfaltigkeit u^n ガ Mannigfaltigkeit M^n ニ wesentlich auf ニ abbilden サレ u^{n-1} ガ Z^{n-1} ニ移ルナラバ u^n ニ普通ノ 0-Zyklus $Z^n \neq 0$ ガ存在スル。5)

次ニ $K^{n-1} \longrightarrow Z^{n-1}$ ニ移ス abbildung f ヲ K^n マデ M^n ニ二通リニ erweitern スルトキソノ二ツノ abbildung F_1, F_2 ガ homotop ナルタメノ條件ハ何カ。必要條件ハ中々難カシイ. 充分條件トシテハ T^m ノ境界デハ F_1, F_2 一致スルカラ二ツ合セテ一方デハ F_1, 他方デハ F_2 トシタトキ $S^m \longrightarrow M^n$ ト考ヘラレ $\pi^m(M^n)$ ノ元ヲ表ス. 之レヲ K^m ノ各 T^m ニツキ行ヒソノ元ヲ對應サセルト Z_0^m デアル。

---

5) 本誌第 190 号. überdeckung ノ Homologiegruppe 定理 2.

定理4　$Z_0^m \sim 0$ ナラバ F_1 ト F_2 ト homotop デアル。

証明略.